Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux factoriels - TD 7

1. Soit R un anneau. La relation $\sim$ dans R définie par
$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ sont associés}$$
est une relation d'équivalence.

2. Soit R un anneau intègre et $p \in R$, $p \neq 0$ et p non-inversible. Si l'idéal (p) est premier, l'élément p est irréductible.

3. Montrer que 5 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ de 2 façons.

4. Un anneau intègre R est factoriel si et seulement si
(i) tout élément de R qui n'est pas zéro ou inversible s'exprime comme produit d'éléments irréductibles de R ;
(ii) si p est un élément irréductible de R, alors l'idéal (p) est premier.

5. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ n'est pas factoriel de 2 façons.

6. Donner un exemple d'un $p \in R$ tel que p est irréductible et (p) n'est pas maximal.

7. Soit R un anneau factoriel et $f(x) \in R[x]$. Montrer que $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$ si et seulement si $uf(x)$ est irréductible dans $R[x]$ pour tout $u \in R^{\times}$.

8. Soit R un anneau factoriel et F son corps des fractions. Un polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ s'appelle *primitif* si $\mathrm{pgcd}(a_i) = 1$. Soit $f(x) \in R[x]$. Si $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$, alors $f(x)$ est irréductible dans $F[x]$. La réciproque est vraie si et seulement si $f(x)$ est primitif.

9. **Critère d'Eisenstein :** Soient R un anneau factoriel et et $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ avec $a_n \neq 0_R$. S'il existe un élément irréductible $p \in R$ tel que
(i) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,
(ii) p ne divise pas a_n, et
(iii) p^2 ne divise pas a_0,
alors $f(x)$ est irréductible dans $F[x]$ où F est le corps des fractions de R. Si en plus $f(x)$ est primitif, $f(x)$ est irréductible dans $R[x]$.

10. Montrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.